理解等和线　巧解系数和

一、等和线背景

苏教版必修 4 第 71 页例 4

如图 1，$\triangle OAB$ 中，C 为直线 AB 上一点，$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}(\lambda\neq-1)$．求证：$\overrightarrow{OC}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$．

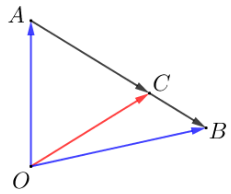

图 1

当 $\lambda\in R$ 且 $\lambda\neq-1$ 时，$\overrightarrow{OC}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$是线段定比分点的向量公式．

若将$\overrightarrow{OC}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$改为$\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OB}$，则为 A，B，C 三点共线的条件．

其一般结论为：

结论 1　一般地，若存在两个实数 s，t，且 $s+t=1$，使得$\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，则 A，B，C 三点共线；反之，若 A，B，C 三点共线，则 $s+t=1$．

二、等和线性质

如果 $s+t\neq1$，那么点 C 与直线 AB 又有怎样的位置关系呢?

能否利用“三点共线”的一般结论，探究两个基底向量系数和所满足的关系．

探究 1　如图 2，直线 AB 把不共线的三点 A，B，O 所在的平面分成三个区域：不含点 O 的区域；直线 AB 上；含点 O 的区域．当点 P 位于不含点 O 的区域时，设 OP 与直线 AB 交于点 P_0，$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$不共线，由共线向量定理，设$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OP_0}(m>1)$，令$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OP_0}=x_0\overrightarrow{OA}+y_0\overrightarrow{OB}$，得 $\lambda+\mu=m(x_0+y_0)$，又 P_0 在直线 AB 上，由结论 1 得 $x_0+y_0=1$．所以 $\lambda+\mu=m$ 为定值．

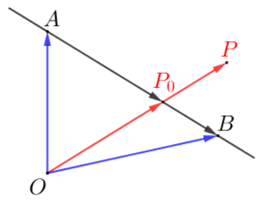

图 2

探究 2　如图 3，过点 P 有且只有一条直线 l 与直线 AB 平行，在 l 上取一点 N，连接 ON，交 AB 于点 M，则$\overrightarrow{ON}=m\overrightarrow{OM}$，由探究 1(或利用三角形的相似性)，$\overrightarrow{ON}$对应以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$为基底向量时的系数和仍为定值 m．我们把这样的“与 AB 平行或重合的直线”为等和线，其中当 l 与 AB 重合时，$\lambda+\mu=1$．

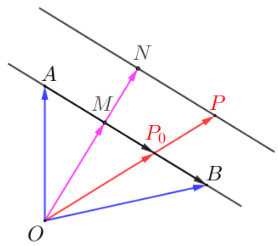

图 3

于是得到如下结论：

结论 2　已知$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$是同一平面内两个不共线的向量，如果对于平面内的任一向量$\overrightarrow{OC}$，满足$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$且$\overrightarrow{OC}$是以“等和线”上的点为终点的向量，那么 $\lambda+\mu=m$．

如图 4，由结论 2 易得 $\lambda+\mu=m=\dfrac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OP_0}|}=\dfrac{|\overrightarrow{ON}|}{|\overrightarrow{OM}|}=\ldots=\dfrac{d_1}{d_2}$(其中 d_1，d_2 分别为 O 到 l，AB 的距离)．

于是得到如下结论：

结论 3　当等和线 l 在点 O 与直线 AB 之间时，$\lambda+\mu=m\in(0，1)$；当直线 AB 在点 O 和等和线 l 之间时，$\lambda+\mu=m\in(1，+\infty)$；当点 O 在直线 AB 与等和线 l 之间时，$\lambda+\mu=m=-\dfrac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OP_0}|}=-\dfrac{|\overrightarrow{ON}|}{|\overrightarrow{OM}|}=-\dfrac{d_1}{d_2}\in(-\infty，0)$．即点 P 距直线 AB 的距离越大，对应的 $\lambda+\mu$ 的绝对值就越大，反之，也成立．

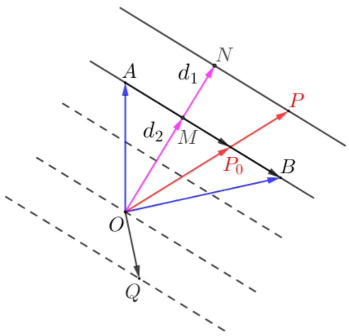

图 4

通过以上分析，所有求解共起点向量线性运算的两个基底向量系数和问题都可以转化为在等和线上适当选择一个特殊点 N，连接 ON 交 AB 于点 M，则必有$\overrightarrow{ON}=m\overrightarrow{OM}$，其中 AB 为 $\lambda+\mu=1$ 的等和线，所以求解$\dfrac{|\overrightarrow{ON}|}{|\overrightarrow{OM}|}$，便可得$|m|$，再根据等和线所在的具体位置判断 m 的符号．

以$\{\overrightarrow{OA}，\overrightarrow{OB}\}$作为平面向量的一组基底，直线 AB 是基底向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$的终点所在直线，我们不妨称之为**基准线**．与基准线 AB 平行的直线 l 上的点所对的有序实数对$(\lambda，\mu)$虽然不同，但是其和却相等，即终点在等和线 l 上且以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$为基底向量的向量的系数和相等．我们不妨称结论 3 为**基准线定理**．

三、等和线应用

1　给定$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，求 $\lambda+\mu$ 的取值或范围

例 1　(2017 年全国新课标Ⅲ12)在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$AD=2$，动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上．若$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，则 $\lambda+\mu$ 的最大值为(　　)

A．3　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．2

解析：如图 5，设圆 C 与 BD 切于点 E，连接 CE，则 $CE\perp BD$，在 Rt△BCD 中，$CD=AB=1$，$BC=AD=2$，则 $BD=\sqrt{5}$，又$\dfrac{1}{2}\times BC\times CD=\dfrac{1}{2}\times BD\times CE$，得 $CE=\dfrac{BC\times CD}{BD}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

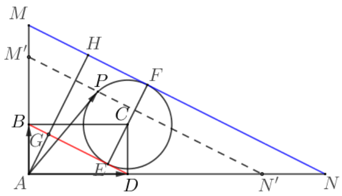

图 5

过动点 P 作基准线 BD 的平行线 l，当 l 与圆切于另一点点 F 时，过点 A 作 l 的垂线分别交直线 BD 和 l 于 G，H，由结论 2 易得 $\lambda+\mu=\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AH}{AG}=\dfrac{3r}{r}=3$，此时，$\lambda+\mu$ 取得最大值，故选 A．

评注：利用基准线定理求解形如$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$的系数和问题，其基本步骤如下：首先将确定基底向量，将其转化为共起点的向量，其次连接基底向量的终点 B，D(即定位基准

线 BD)，然后在点 P 所满足的轨迹内过点 P 作基准线的平行线 l，最后利用平行线分线段成比例分别计算点 A 到 l 和 BD 的距离，再根据题设条件求出 $\lambda+\mu$ 的值或范围．其流程可以归纳为“判断共起点，定位基准线，作出平行线，探寻距离比”．

例 2　如图 6，在正方形 $ABCD$ 中，E 为 AB 的中点，P 是以 A 为圆心，AB 为半径的圆弧 BD 上任意一点，设 $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{DE}+y\overrightarrow{AP}$，则 $x+y$ 的最大值为__▲__．

解析：如图 6，作 $EF\perp AB$ 且 $EF=AD$，连接 FA，FD.

设 AC 交 FP，FD 于点 M，N，设 FD 交 AB 于点 Q.

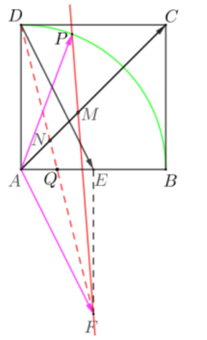

图 6

易证四边形 $AFED$ 为平行四边形，则 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AF}$，

由 $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{DE}+y\overrightarrow{AP}$，得 $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AF}+y\overrightarrow{AP}$，

点 P 是以 A 为圆心，AB 为半径的圆弧 BD 上任意一点，

当点 P 与点 D 重合时，AM 取得最小值，此时，点 M 与点 N 重合，

由 E 为 AB 的中点，四边形 $AFED$ 为平行四边形，得 Q 为 AE 的中点，即 $\dfrac{AQ}{AB}=\dfrac{AQ}{CD}=\dfrac{1}{4}$，又 $\triangle ANQ\backsim\triangle CND$，所以 $\dfrac{AN}{NC}=\dfrac{1}{4}$，所以 $\dfrac{AC}{AN}=5$，

由等和线性质，得 $x+y=\dfrac{AC}{AM}$.

所以 $x+y$ 的最大值为 5.

评注：由于基底向量不共起点，因此，要将其转化为共起点的向量，即过点 A 作 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{DE}$．由于基底 $\overrightarrow{AP}$ 的动态变化，从而导致基准线和等和线都在作相应的变化. 为了便于分析和求解，可以选择从特殊位置入手，观察基准线与等和线的位置变化，即当 P 为 CF 与圆弧的交点时，基准线 PF 与等和线 CF 重合，此时，$x+y=1$；当点 P 在圆弧 $\overset{\frown}{DP_0}$ 上运动时，由图易知 $x+y>1$，当点 P 与点 D 重合时，$x+y$ 取得最大值；当点 P 在圆弧 $\overset{\frown}{P_0B}$ 上运动时，由图易知 $0<x+y<1$，当点 P 与点 B 重合时，$x+y$ 取得最小值．在探求含有动态变化的基底向量问题其关键在于探究保持平行变化中满足条件的等和线的位置.

【相似题组】

1．如图 7，正六边形 $ABCDE$ 中，P 是△CDE 内(包含边界)的动点，设 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AF}$($\lambda$，$\mu\in R$)，则 $\lambda+\mu$ 的取值范围是__▲__．

解析：解法 1：设正六边形 $ABCDE$ 的边长为 1，以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 为基底，如图 7，建立斜坐标系 $B-A-F$，则 $C(2，1)$，$D(2，2)$，$E(1，2)$.

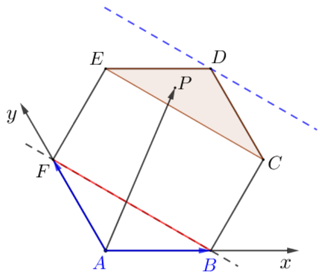

图 7

连接 BF，则直线 BF：$\lambda+\mu=1$，将 BF 按向量 $\overrightarrow{AB}$ 平移，当直线 BF 与直线 CE 重合时，$\lambda+\mu$ 取得最小值，即 $(\lambda+\mu)_{\min}=2+$

$1=3$；将直线 BF 平移使其过点 D 时，$\lambda+\mu$ 取得最大值，即$(\lambda+\mu)_{max}=2+2=4$，

所以，$\lambda+\mu$ 的取值范围是[3，4]．

解法 2：设正六边形 $ABCDE$ 的边长为 2，如图 8，连接 BF，CD 与 AD 分别交于点 N，M，易求$\frac{AM}{AN}=3$，$\frac{AD}{AN}=4$．

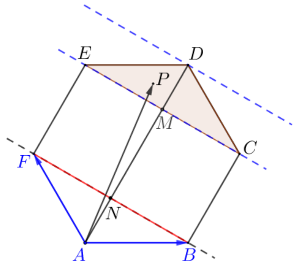

图 8

以向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}$为基底向量，BF 为基准线，由结论 2 和 3 知，平移直线 BF，当其与直线 CD 重合时，$\lambda+\mu$ 取得最小值，即$(\lambda+\mu)_{min}=\frac{AM}{AN}=3$；平移直线 BF，当其过点 D 时，$\lambda+\mu$ 取得最大值，即$(\lambda+\mu)_{max}=\frac{AD}{AN}=4$．

评注：解法 1 利用解析法求解，即通过建立斜坐标系，求出基准线的方程并结合线性规划知识求解，这也是一个很好的选择．解法 2 利用基准线定理求其范围，既方便又快捷．

2．如图 9，△ABC 中，$AB=AC$，D，E 分别在 AC，AB 上，且 $AD=DC$，$AE=\frac{1}{2}EB$，EC 与 BD 交于点 G，点 P 在△DEG 内部(不含边界)，且$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}(\lambda，\mu\in R)$，则 $\lambda+\mu$ 的取值范围是(　　)．

A．$(\frac{1}{3}，\frac{1}{2})$　　B．$(\frac{1}{3}，\frac{3}{5})$　　C．$(\frac{1}{2}，\frac{4}{5})$　　D．$(\frac{3}{5}，\frac{4}{5})$

解析：解法 1：以$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$为基底建立斜坐标系，设 $AB=AC=1$，则点 $B(1，0)$，$C(0，1)$，$D(0，\frac{1}{2})$，$E(\frac{1}{3}，0)$．直线 BC：$x+y=1$，联立直线 EC：$\frac{x}{\frac{1}{3}}+\frac{y}{1}=1$ 及直线 BD：$\frac{x}{1}+\frac{y}{\frac{1}{2}}=1$，解得 $G(\frac{1}{5}，\frac{2}{5})$，设与 BC 平行的直线 l：$x+y=z$，则 z 的几何意义为在轴(或 y 轴)上的截距，又动点 $P(x，y)$ 在△DEG 内运动，所以 l 与△DEG 内部区域有交点，由图 9 易知，当 l 平移至点 $G(\frac{1}{5}，\frac{2}{5})$ 时，截距 z 有最大值为$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$，当 l 平移至点 $E(\frac{1}{3}，0)$时，截距 z 又最小值$\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}$(即点 E 的横坐标)，所以 $z\in(\frac{1}{3}，\frac{3}{5})$，故选 C．

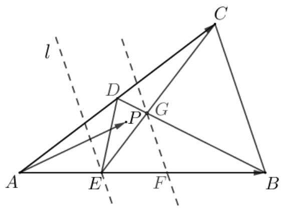

图 9

解法 2：以向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$为一组基底，点 P 在△DEF 内部(不含边界)，过 A 作 BC 的平行线交 CE 的延长线于点 H，取 AE 的中点 M，因为 $AD=DC$，所以 $CE=2DM$，设 $DM=x$，则 $CE=2x$，又因为 $AE=\frac{1}{2}EB$，所以 $HE=\frac{1}{2}EC=x$，设 $ME=t$，则 $EB=4t$，GE：$DM=4$：5，故 $GE=\frac{4x}{5}$．当点 P 运动到 G 点时，$\lambda+\mu$ 取得最大值，即$(\lambda+\mu)_{\max}=\frac{AF}{AB}=\frac{HG}{HC}=\frac{x+\frac{4x}{5}}{3x}=\frac{3}{5}$；当点 P 运动到 E 点时，$\lambda+\mu$ 取得最小值，即$(\lambda+\mu)_{\min}=\frac{AE}{AB}=\frac{1}{3}$，$g$ 故 $\lambda+\mu\in(\frac{1}{3}，\frac{3}{5})$，故选 C.

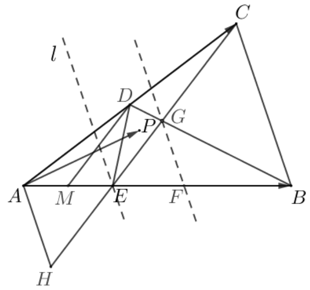

图 10

评注：解法 1 通过建立适当的斜坐标系，求出两直线的交点 G，再结合线性规划知识求 $\lambda+\mu$ 的范围．解法 2 利用基准线定理和平面几何的知识求解，需要较强的平面几何知识的功底.

3．已知△ABC 中，$AB=2$，$AC=1$，$BC=\sqrt{7}$，O 是△ABC 的外心，且$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则 $\lambda+\mu=$____▲____.

解析：解法 1：如图 11，O 是△ABC 的外心，过点 O 作基准线 BC 的平行线 l，再过点 A 作 l 的垂线分别交 BC 与 l 于点 M，N，连接 OC，在△ABC 中，$AB=2$，$AC=1$，$BC=\sqrt{7}$，取 BC 的中点 H，则 $CH=\frac{\sqrt{7}}{2}$，且 $OH\perp BC$，由余弦定理易得$\angle BAC=120^{\circ}$，再由正弦定理得 $2OC=\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{\sqrt{7}}{\sin 120^{\circ}}=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$，故 $OC=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$，所以 $OH=\sqrt{OC^2-CH^2}=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$，易证 $NM=OH=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$．在 Rt△$ABM$ 中，易求 $AM=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$．又$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，根据基准线定理，易得 $\lambda+\mu=\frac{AN}{AM}=\frac{AM+MN}{AM}=1+\frac{MN}{AM}=\frac{13}{6}$.

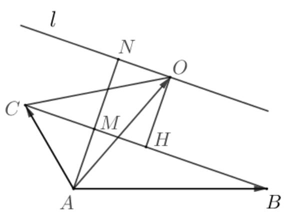

图 11

解法 2：如图 12，建立斜坐标系 xAy，在△ABC 中，由 $AB=2$，$AC=1$，$BC=\sqrt{7}$，得 $A(0，0)$，$B(2，0)$，$C(0，1)$，$\overrightarrow{AB}=(2，0)$，$\overrightarrow{AC}=(0，1)$，$\overrightarrow{AO}=(2\lambda，\mu)$，由余弦定理易得$\angle xAy=120^{\circ}$．又因为 O 是△ABC 的外心，所以$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2=2$，$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2=\frac{1}{2}$，即$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times2\lambda+0\times\lambda+(0\times2\lambda+2\mu)\cos\angle120^{\circ}=4\lambda-\mu$①，$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=0\times2\lambda+\mu+(1\times2\lambda+0\times\mu)\cos\angle120^{\circ}=-\lambda+\mu$②，联立方程①②，解得 $\lambda=\frac{5}{6}$，$\mu=\frac{8}{6}$，所以 $\lambda+\mu=\frac{13}{6}$.

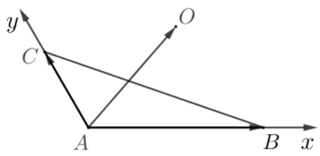

图 12

2　给定$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，求 $a\lambda+b\mu$ 的取值或范围

例 3　平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=60^{\circ}$，$AB=1$，$AD=\sqrt{2}$，P 为平行四边形内一点，且 $AP=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，若$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}(\lambda，\mu\in R)$，则 $\lambda+\sqrt{2}\mu$ 的最大值为___▲___.

解析：如图 13，在直线 AD 取点 D'，使得$\overrightarrow{AD'}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AD}$，则$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\sqrt{2}\mu\overrightarrow{AD'}$．连接 BD'，作与直线 BD'平行的直线 MN，且与圆弧相切于点 p'，延长 OP'交 BD'于点 P''，由结论 3 易知，当点 P 在圆弧$\overset{\frown}{EF}$上运动时，$0<\lambda+\sqrt{2}\mu<1$，当点 P 运动到与点 P'重合时，$\lambda+\sqrt{2}\mu$ 取得最大值，由平面几何知识易得$(\lambda+\sqrt{2}\mu)_{max}=\dfrac{AP'}{AP''}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，，所以 $\lambda+\sqrt{2}\mu$ 的最大值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

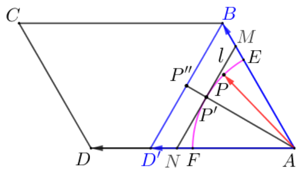

图 13

评注：利用基准线定理探求向量分解中的系数和问题时，特别要关注待求和的两个数是否为基底向量的系数．比如，已知$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，求 $a\lambda+b\mu$ 的问题．通过构造新的基底向量$\overrightarrow{OA'}$，$\overrightarrow{OB'}$，且满足$\overrightarrow{OA'}=a\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=b\overrightarrow{OB}$，从而“重新定位”基准线 $A'B'$，将其转化为以向量$\overrightarrow{OA'}$，$\overrightarrow{OB'}$为基底的系数和问题.

☆相似题组跟踪训练

1．如图 14，在平行四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别为 CD 和 BC 的中点，若$\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AF}$，则 $2x+4y=$___▲___.

解析：如图 15，作 AF 的中点 F'，连接 EF'交 AB 于点 B'，则 B'为 AB 的中点，故$\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AE}+2y\overrightarrow{AF'}$，由基准线定理得 $x+2y=\dfrac{AB}{AB'}=2$，所以 $2x+4y=4$.

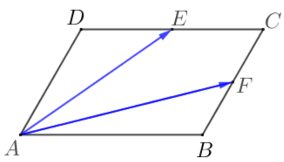

图 14

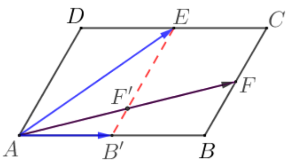

图 15

2．平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=60^{\circ}$，$AB=1$，$AD=\sqrt{2}$，P 为平行四边形内一点，且 $AP=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，若$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，$(\lambda，\mu\in R)$，则 $\lambda-\sqrt{2}\mu$ 的最大值为_______.

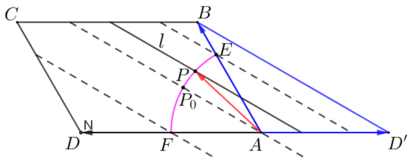

图 16

解析：如图 16，在直线 AD 取点 D'，使得$\overrightarrow{AD'}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AD}$，则 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}-\sqrt{2}\mu(-\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AD})=\lambda\overrightarrow{AB}-\sqrt{2}\mu\overrightarrow{AD'}$. 连接 BD'，作与直线 BD'平行的直线 l，设圆弧$\overset{\frown}{EF}$的中点为 P_0，由结论 3 易知，当点 P 在圆弧$\overset{\frown}{P_0E}$上运动时，$0<\lambda-\sqrt{2}\mu<1$；当点 P 运动到与点 P_0 重合时，$\lambda-\sqrt{2}\mu=0$；当点 P 在圆弧$\overset{\frown}{P_0F}$上运动时，$-1<\lambda-\sqrt{2}\mu<0$． 当点 P 运动到与点 E 重合时，$\lambda-\sqrt{2}\mu$ 取得最大值，由平面几何知识易得$(\lambda+\sqrt{2}\mu)_{\max}=\frac{AE}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\lambda-\sqrt{2}\mu$ 的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

评注：由于待求和 $\lambda-\sqrt{2}\mu$ 的两个数不是基底系数的和，需要重新定位基准线，根据点 P 所满足的轨迹平移等和线并结合平面几何知识探寻 $\lambda-\sqrt{2}\mu$ 的最大值.

3．给定$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$中 λ 与 μ 的限制条件，求与点 P 相关的问题

例 4　(2020 年江苏 13)如图 17，在△ABC 中，$AB=4$，$AC=3$，$\angle BAC=90^\circ$，D 在边 BC 上，延长 AD 到 P，使得 $AP=9$. 若 $\overrightarrow{PA}=m\overrightarrow{PB}+(\frac{3}{2}-m)\overrightarrow{PC}$($m$ 为常数)，则 CD 的长度是________.

答案：0 或$\frac{18}{5}$

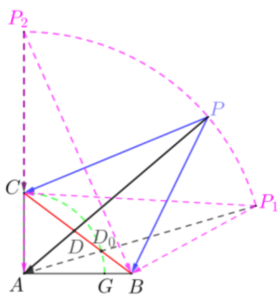

图 17

解析：由 $\overrightarrow{PA}=m\overrightarrow{PB}+(\frac{3}{2}-m)\overrightarrow{PC}$($m$ 为常数)的基底向量的系数和为$\frac{3}{2}$，根据结论 2，易知$\frac{PA}{PD}=\frac{3}{2}$. 又 $AP=9$，得$\frac{9}{PD}=\frac{3}{2}$，即 $PD=6$，所以 $AD=3$，即点 D 在以 A 为圆心，3 为半径的圆上，又在线段 BC 上，如图 17，故点 D 应为圆弧$\overset{\frown}{CG}$与线段 CB 的交点，即点 C 和点 D_0. 当 D 与 C 重合时，$CD=0$；当 D 与 D_0 重合时，在△ACD_0 中，$AC=CD_0=3$，易求 $\cos\angle ACB=\frac{3}{5}$，故 $CD=2\times3\times\frac{3}{5}=\frac{18}{5}$，所以 CD 的长度为 0 或$\frac{18}{5}$.

评注：基准线定理是该题命制的依据．向量 $\overrightarrow{PA}$与两个基底向量$\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PC}$都在变动是该题求解的难点．根据要求解的目标 CD 为定值，自然联想到“动中含定”的问题，思考条件中的不变量是什么？导致不变的因素是什么?如何找到不变量所对应的位置?因此，基底向量的系数和为定 值是解题的题眼，并利用结论 2，将问题“化动为静”再结合平面几何知识求解.

例 4　(2013 年安徽理)在平面坐标系中，O 为坐标原点，两定点满足$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，则点集$\{P|\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，$|\lambda|+|\mu|\leqslant1$，$\lambda$，$\mu\in R\}$所表示的区域的面积为

(　　)

A．$2\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{3}$　　C．$4\sqrt{2}$　　D．$4\sqrt{3}$

解析：解法 1：由$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，易得向量$<\overrightarrow{OA}，\overrightarrow{OB}>=60^{\circ}$．如图 18，$A$，$B$ 关于 O 的对称点为 A'，B'．当 $\lambda\geqslant0$，$\mu\geqslant0$ 时，若 $\lambda+\mu=1$，则点 P 位于线段 AB 上；当 $\lambda\geqslant0$，$\mu\leqslant0$ 时，若 $\lambda-\mu=1$，$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}=\lambda\overrightarrow{OA}+(-\mu)\overrightarrow{OB'}$，则点 P 位于线段 AB'上；当 $\lambda\leqslant0$，$\mu\geqslant0$ 时，若$-\lambda+\mu=1$，则$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}=(-\lambda)\overrightarrow{OA'}+\mu\overrightarrow{OB'}$，则点 P 位于线段 $A'B$ 上；当 $\lambda\leqslant0$，$\mu\leqslant0$ 时，若$-\lambda-\mu=1$，则$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}=(-\lambda)\overrightarrow{OA'}+(-\mu)\overrightarrow{OB'}$，则点 P 位于线段 $A'B'$上．又因$|\lambda|+|\mu|\leqslant1$，应用性质 1 及 7，可知点位于矩形 $ABAB$ 内(含边界)，其面积为 $S=4\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin\frac{\pi}{3}=4\sqrt{3}$．

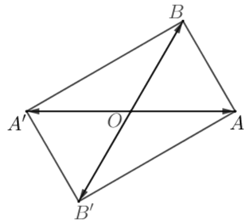

图 18

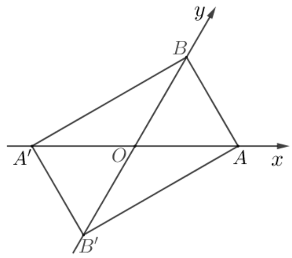

图 19

解法 2：如图 19，建立斜坐标系 xOy．设$\angle xOy=\theta$，则 $A(2，0)$，$B(0，2)$，所以 $2=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2\times0+0\times2+(2\times2+0\times0)\cos\theta$，得 $\cos\theta=\frac{1}{2}$，即$\angle AOB=60^{\circ}$，则$\overrightarrow{OP}=\lambda(2，0)+\mu(0，2)=(2\lambda，2\mu)$．令 $2\lambda=x$，$2\mu=y$，则 $P(x，y)$满足$|\frac{x}{2}|+|\frac{y}{2}|\leqslant1$，即$|x|+|y|\leqslant2$，易知点 P 的轨迹是在图中平行四边形 $ABA'B'$内部(含边界)所表示的区域，故其面积为 $S=4\times\frac{1}{2}\times2\times2\sin60^{\circ}=4\sqrt{2}$，故选 D．

☆相似题组跟踪训练

1. 若$\triangle PAB$ 是边长为 6 的等边三角形，点 C 满足$\overrightarrow{PC}=x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}$，且 $2x+3y=4$，其中 $x>0$，$y>0$，则$|\overrightarrow{PC}|$的取值范围为__▲__．

解析：解法 1：因为 $2x+3y=4$，所以$\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y=1$．令$\overrightarrow{PA'}=2\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB'}=\frac{4}{3}\overrightarrow{PB}$，如图 20，构造新的基底向量$\overrightarrow{PA'}$，$\overrightarrow{PB'}$表示$\overrightarrow{PC}$，即$\overrightarrow{PC}=\frac{1}{2}x(2\overrightarrow{PA})+\frac{3}{4}y(\frac{4}{3}\overrightarrow{PB})=\frac{1}{2}x\overrightarrow{PA'}+\frac{3}{4}y\overrightarrow{PB'}$，又 $x>0$，$y>0$，根据性质 1 易知点 C 在线段 $A'B'$(不含端点)上运动．因为$\triangle PAB$ 是边长为 6 的等边三角形，所以$|\overrightarrow{PA'}|=12$，$|\overrightarrow{PB'}|=8$，在$\triangle PA'B'$中，由余弦定理得$(A'B')^2=|\overrightarrow{PA'}|^2+|\overrightarrow{PB'}|^2-2|\overrightarrow{PA'}|\cdot|\overrightarrow{PB'}|\cos\angle A'PB'=112$，故 $A'B'=4\sqrt{7}$．过点 P 作

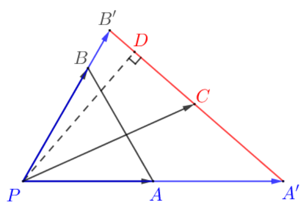

图 20

PD 垂直于 $A'B'$于点 D，再利用三角形面积公式，得$\frac{1}{2}\times|\overrightarrow{PA'}|\times|\overrightarrow{PB'}|\sin60^\circ=\frac{1}{2}\times|A'B'|\times PD$，得 $PD=\frac{12\sqrt{21}}{7}$．当点 C 与 D 重合时，$|\overrightarrow{PC}|_{\min}=\frac{12\sqrt{21}}{7}$，当点 C 与 A'重合时，$|\overrightarrow{PC}|_{\max}=12$，又因为点 C 与 A'不重合，所以$\frac{12\sqrt{21}}{7}\leqslant|\overrightarrow{PC}|<12$．

解法 2：由解法 1 易得$|\overrightarrow{PA'}|=12$，$|\overrightarrow{PB'}|=8$，以$\overrightarrow{PA'}$，$\overrightarrow{PB'}$为基底，如图 21，建立斜坐标系 xPy，则 $P(0，0)$，$A'(12，0)$，$B'(0，8)$，易得直线 $A'B'$：$\frac{x}{12}+\frac{y}{8}=1$．过点 P 作 PD 垂直于 $A'B'$于点 D，得$\overrightarrow{PD}\perp\overrightarrow{A'B'}$，设 $D(a，b)$，则$\frac{a}{12}+\frac{b}{8}=1$①，$\overrightarrow{A'B'}=(-12，8)$，$\overrightarrow{PD}=(a，b)$，故$\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{A'B'}=-12a+8b+(8a-12b)\cos60^\circ=-8a+2b=0$，即 $b=4a$②，联立①②得 $a=\frac{12}{7}$，$b=\frac{48}{7}$，即 $D(\frac{12}{7}，\frac{48}{7})$，所以 $PD=\sqrt{\overrightarrow{PD}^2}=\frac{12\sqrt{21}}{7}$，故$|\overrightarrow{PC}|_{\min}=\frac{12\sqrt{21}}{7}$，当点 C 与 A'重合时，$|\overrightarrow{PC}|_{\max}=12$，又因为点 C 与 A'不重合，所以$\frac{12\sqrt{21}}{7}\leqslant|\overrightarrow{PC}|<12$．

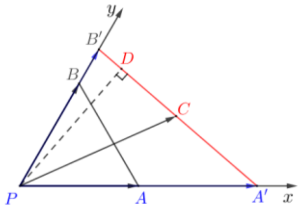

图 21

评注：解法 1 以 $2x+3y=4$ 作为解题的切入点，将基底向量的系数和化为 1，此时，“基准线”与向量$\overrightarrow{PC}$终点 C 所在的直线重合，通过观察很容判断动点 C 与定点 P 的距离大小，这样的处理使得解题更为简捷．解题时一定要关注条件 $x>0$，$y>0$，它限制动点 P 的运动轨迹，根据 “性质 1”，易知点 C 在线段 $A'B'$(不含端点)上运动，这样才能保证结论的正确性．解法 2 利用斜坐标求解，其关键是求出垂足 D 的坐标，再结合斜坐标系下向量模的公式很容易求出$|\overrightarrow{PC}|$的取值范围．

2．已知 O 为△ABC 的外心，$AB=6$，$AC=10$，$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，且 $2x+10y=5$，则 $\cos\angle BAC=$__▲__．

解析：当 $x=0$ 时，$y=\frac{1}{2}$，由$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，得$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，所以△$ABC$ 是以 AC 为斜边的直角三角形，则 $\cos\angle BAC=\frac{3}{5}$．当 $x\neq0$ 时，设$\overrightarrow{AE}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，则$|\overrightarrow{AE}|=15$，$|\overrightarrow{AF}|=5$．由$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，得$\overrightarrow{AO}=\frac{2}{5}x\overrightarrow{AE}+2y\overrightarrow{AF}$，又因为 $2x+10y=5$，所以$\frac{2}{5}x+2y=1$，由结论 1 得 E，F，O 三点共线，又 F 为 AC 中点，故 $EF\perp AC$，所以 $\cos\angle BAC=\frac{AF}{AE}=\frac{1}{3}$.

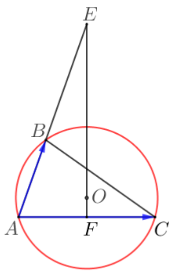

图 22

3．如图 23，已知△OAB，由射线 OA 和射线 OB 及线段 AB 构成如图所示的阴影区(不含边界)．下列四个向量，对于点 M_1，M_2，M_3，M_4，落在阴影区域内(不含边界)的有(　　)

A．$\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$　　　　B．$\overrightarrow{OM_2}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

C．$\overrightarrow{OM_3}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$　　　　D．$\overrightarrow{OM_4}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$

解析：设 M 在阴影区域内，则射线 OM 与线段 AB 有公共点，记为 N，则存在实数 $t\in(0,1)$，使得$\overrightarrow{BN}=t\overrightarrow{BA}$，即$\overrightarrow{ON}=t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}$，且存在实数 $r>1$，使得$\overrightarrow{OM}=r\overrightarrow{ON}$，从而$\overrightarrow{OM}=rt\overrightarrow{OA}+r(1-t)\overrightarrow{OB}$，且 $rt+r(1-t)=r>1$．又由于 $0<t<1$，故 $r(1-t)>0$．

对于选项 A，$rt=1$，$r(1-t)=2$，解得 $r=3$，$t=\frac{1}{3}$，满足 $r>1$，也满足 $r(1-t)>0$，故 A 满足条件；

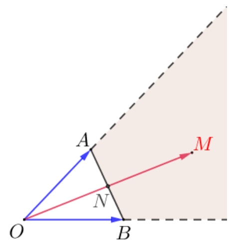

图 23

对于选项 B，$rt=\frac{3}{4}$，$r(1-t)=\frac{1}{3}$，解得 $r=\frac{13}{12}$，$t=\frac{9}{13}$，满足 $r>1$，也满足 $r(1-t)>0$，故 B 满足条件；

对于选项 C，$rt=\frac{1}{2}$，$r(1-t)=\frac{1}{3}$，解得 $r=\frac{5}{6}$，$t=\frac{3}{5}$，不满足 $r>1$，故 C 不满足条件；

对于选项 D，$rt=\frac{3}{4}$，$r(1-t)=\frac{1}{5}$，解得 $r=\frac{19}{20}$，$t=\frac{15}{19}$，不满足 $r>1$，故 D 不满足条件．

评注：设向量$\overrightarrow{OM_i}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(i=1，2，3，4)$，根据题设条件和性质 1，易得 $\lambda>0$，μ $>$，且 $\lambda+\mu>1$，该问题的求解便可“秒杀”．

内容拓展

下面，我们从另外一个视角(斜坐标系)探究基底向量的系数和问题．

平面向量基本定理：如果 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内两个不共线的向量，那么对于这一平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$，有且只有一对实数 λ_1，λ_2，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$．

我们把不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 叫做表示这一平面内所有向量的一组基底．

人教 A 版必修 4 第 102 页 B 组第 4 题，如图 24，设 Ox，Oy 是平面内相交成 60º 角的两条数轴，$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$分别是与 x 轴，y 轴正方向同向的单位向量，若$\overrightarrow{OP}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}$，则把有序实数对$(x，y)$叫做向量$\overrightarrow{OP}$在坐标系 xOy 中的坐标．假设$\overrightarrow{OP}=3\vec{e_1}+2\vec{e_2}$，(1)计算$|\overrightarrow{OP}|$大小；(2)由平面向量基本定理，本题中向量坐标的规定是否合理？

根据向量模的意义，易知$\overrightarrow{OP}^2=(3\vec{e_1}+2\vec{e_2})^2=13+12\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}=19$，故$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{19}$．

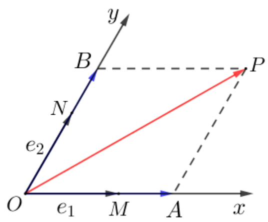

图 24

根据平面向量基本定理，以平面内一组不共线的单位向量$\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{ON}$为基底，对平面内任一向量$\overrightarrow{OP}$，有且仅有唯一的有序实数对(x,y)，使得$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OM}+y\overrightarrow{ON}$，这样，对应于基底$\overrightarrow{OM}$，　$\overrightarrow{ON}$，向量$\overrightarrow{OP}$就与唯一确定的有序实数对$(x，y)$相对应．反之，如果存在一对确定的有序数对$(x，y)$，那么 $x\overrightarrow{OM}+y\overrightarrow{ON}$确定平面内唯一的向量．显然，根据平

面向量基本定理，本题中向量坐标的规定是合理的．

如果$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$为一组正交基底(即$\vec{e_1}\perp\vec{e_2}$)，那么(x，y)称为向量在直角坐标系下的坐标，如果不是正交基底，我们不妨把它称为在基底($\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$)下的“斜坐标”．

类比直角坐标系，并结合平面向量基本定理，不难得到，基于基底($\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$)下的斜坐标(λ，μ)的一些性质如下．

性质 1：如图 25，向量 OM、ON 所在的直线将平面区域分成四个部分，在四个区域内点 P(x，y)的坐标符号与平面直角坐标系下的规律一致．

证明：如图 5，设向量$\overrightarrow{OP}$在 x 轴，y 轴上的分解分别为$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，则$\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{OB}=y\overrightarrow{ON}$，在点 $P(x$，$y)$中，x，y 的几何意义为：$x=\pm\dfrac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OM}|}$， $y=\pm\dfrac{|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{ON}|}$，当$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{OB}$与$\overrightarrow{ON}$分别同向共线时，$x$，$y$ 均为正值，类似可以分析 x，y 的其它取值情况，所以点 $P(x$，$y)$在斜坐标系 xOy 的四个象限的坐标符号如图 6 所示．

性质 2：如图 26，点 O，M，N 的坐标分别是(0，0)，(1，0)，(0，1)．

证明：因为$\vec{0}=0\cdot\overrightarrow{OM}+0\cdot\overrightarrow{ON}$，$\overrightarrow{OM}=1\cdot\overrightarrow{OM}+0\cdot\overrightarrow{ON}$，$\overrightarrow{ON}=0\cdot\overrightarrow{OM}+1\cdot\overrightarrow{ON}$，所以根据斜坐标系的定义，性质 2 得证．

在直角坐标系下，$x+y=1$ 表示过点(0，1)(1，0)的一条直线，那么在斜坐标系下，如图 7，$x+y=1$ 表示什么呢?根据平面向量定理，易得性质 3．

性质 3：二元一次方程 $Ax+By+C=0(A$，B 不同时为 0)表示直线方程．

证明：

性质 4：如图 27，在斜坐标系下，$x+y=k(k\in R)$表示一族平行的直线，其中 k 为直线 $x+y=k$ 在向量$\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{ON}$上的“截距”．

性质 5：设 $f(x$，$y)=Ax+By+C$，则在 $A>0$ 时，$x_2>x_1$ 等价于 $f(x_2$，$y_0)>f(x_1$，$y)$；在 $B>0$ 时，$y_2>y_1$ 等价于 $f(x_0$，$y_2)>f(x_0$，$y_1)$．在 $A<0$(或 $B<0$)时，结论相反．

(简单直观地说，在 $A>0(B>0)$)时，点越向右(上)，其坐标使函数 $f(x$，$y)$的值越大；在 $A<0(B<0)$时，点越向右(上)，其坐标使函数 $f(x$，$y)$的值越小．也可以理解为，当直线的斜率大于 0，点越向右(上)，其坐标使函数 $f(x$，$y)$的值越大；当直线的斜率小于 0，点越向右(上)，其坐标使函数 $f(x$，$y)$的值越小．)

性质 6：设点 $P_1(x_1$，$y_1)$，$P_2(x_2$，$y_2)$，直线 l：$Ax+By+C=0$．若直线 $P_1P_2/\!/l$，则 $Ax_1+By_1+C=Ax_2+By_2+C$(构造等和线的理论)．

性质 7：如图 27，在斜坐标系中，x，y 轴正方向所围成的区域被直线 AB 分割成两个部分(不含边界)，其中，含点 O 区域内的点的坐标满足 $x+y<1$，不含点 O 区域内的点坐标满足 $x+y>1$．类似的，在直线 $M'N'$分成的两个区域内，含点 O 区域内的点的坐标满足$-x-y<1$，不含点 O 区域内的点坐标满足$-x-y>1$．

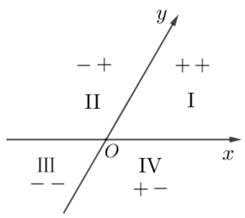

图 25

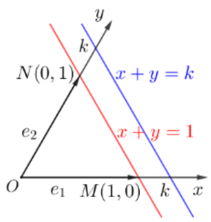

图 26

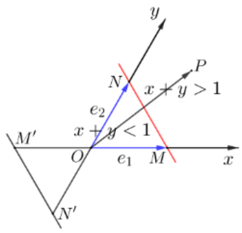

图 27

当向量用坐标表示时，向量的和、差、向量数乘以及数量积等也可以用相应的坐标表示.

设 Ox，Oy 是平面内相交成 $\theta(0<\theta<\pi)$角的两条数轴，$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$分别是与 x 轴，y 轴正方向同向的单位向量，设$\vec{a}=x_1\vec{e_1}+y_1\vec{e_2}$，$\vec{b}=x_2\vec{e_1}+y_2\vec{e_2}$，根据斜坐标的定义，易得$\vec{a}=(x_1，y_1)$，$\vec{b}=(x_2，y_2)$，于是，便可以得到斜坐标系下平面向量的坐标运算.

1．斜坐标系下平面向量的坐标运算

已知向量$\vec{a}=(x_1，y_1)$，$\vec{b}=(x_2，y_2)$和实数 λ，那么$\vec{a}+\vec{b}=(x_1\vec{e_1}+y_1\vec{e_2})(x_2\vec{e_1}+y_2\vec{e_2})=(x_1+x_2)\vec{e_1}+(y_1+y_2)\vec{e_2}=(x_1+x_2，y_1+y_2)$；同理得$\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2，y_1-y_2)$；$\lambda\vec{a}=\lambda(x_1\vec{e_1}+y_1\vec{e_2})=\lambda x_1\vec{e_1}+\lambda y_1\vec{e_2}=(\lambda x_1，\lambda y_1)$．在斜坐标系 xOy 中，若 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，则$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1，y_2-y_1)$.

2．斜坐标系下平面向量共线的坐标表示

设$\vec{a}=(x_1，y_1)$，$\vec{b}=(x_2，y_2)(\vec{a}\neq\vec{0})$．如果$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$，那么 $x_1y_2-x_2y_1=0$；反过来，如果 $x_1y_2-x_2y_1=0$，那么$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$.

说明：斜坐标系与直角坐标系下的平面坐标运算以及向量共线的表示方法相同.

3．斜坐标系下平面向量数量积、模、夹角的坐标表示

由$\vec{a}=x_1\vec{e_1}+y_1\vec{e_2}$，$\vec{b}=x_2\vec{e_1}+y_2\vec{e_2}$，$<\vec{a}，\vec{b}>=\theta$，得$\vec{a}\cdot\vec{b}=(x_1\vec{e_1}+y_1\vec{e_2})(x_2\vec{e_1}+y_2\vec{e_2})=x_1x_2\vec{e_1}^2+x_1y_2\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}+x_2y_1\vec{e_2}\cdot\vec{e_1}+y_1y_2\vec{e_2}^2$，因为$|\vec{e_1}|=|\vec{e_2}|=1$，$\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}=\cos\theta$，所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+(x_1y_2+x_2y_1)\vec{e_2}\cdot\vec{e_1}=x_1x_2+y_1y_2+(x_1y_2+x_2y_1)\cos\theta$．即$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+(x_1y_2+x_2y_1)\cos\theta$．由此得到如下常用结论：

(1)$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+2x_1y_1\cos\theta}$；

(2) $\vec{a}\perp\vec{b}$充要条件为 $x_1x_2+y_1y_2+(x_1y_2+x_2y_1)\cos\theta=0$；

(3)$\cos<\vec{a}，\vec{b}>=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+(x_1y_2+x_2y_1)\cos\theta}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+2x_1y_1\cos\theta}\sqrt{x_2^2+y_2^2+2x_2y_2\cos\theta}}$.

说明：特别地，当 $\theta=\frac{\pi}{2}$时，该坐标系为平面直角坐标系．可见，直角坐标系是一种一种特殊的斜坐标系．