第10讲：高考概率真题梳理

1. (2021 新高考Ⅰ) 某学校组织"一带一路"知识竞赛，有 A，B 两类问题．每位参加比赛的同学先在两类问题中选择一类并从中随机抽取一个问题回答，若回答错误则该同学比赛结束；若回答正确则从另一类问题中再随机抽取一个问题回答，无论回答正确与否，该同学比赛结束．A 类问题中的每个问题回答正确得 20 分，否则得 0 分；B 类问题中的每个问题回答正确得 80 分，否则得 0 分．已知小明能正确回答 A 类问题的概率为 0.8，能正确回答 B 类问题的概率为 0.6，且能正确回答问题的概率与回答次序无关．

(1) 若小明先回答 A 类问题，记 X 为小明的累计得分，求 X 的分布列；

(2) 为使累计得分的期望最大，小明应选择先回答哪类问题？并说明理由．

(1) X 取值 0，20，100

$P(X=0)=0.2$

$P(X=20)=0.8\times0.4=0.32$

$P(X=100)=0.8\times0.6=0.48$.

∴ X 的分布列为

X	0	20	100
P	0.2	0.32	0.48

∴ $E(X)=20\times0.32+100\times0.48=54.4$

(2) 先回答 B 的累计得分 Y 则 Y 取值 0. 80. 100

$P(Y=0)=0.4$

$P(Y=80)=0.6\times0.2=0.12$

$P(Y=100)=0.6\times0.8=0.48$

∴ $E(Y)=80\times0.12+48=57.6$

∵ $E(Y)>E(X)$ ∴ 小明应先选择回答 B 类问题.

2. (2022· 北京) 在校运动会上，只有甲、乙、丙三名同学参加铅球比赛，比赛成绩达到 9.50m 以上 (含 9.50m) 的同学将获得优秀奖．为预测获得优秀奖的人数及冠军得主，收集了甲、乙、丙以往的比赛成绩，并整理得到如下数据 (单位：m):

甲：9.80，9.70，9.55，9.54，9.48，9.42，9.40，9.35，9.30，9.25；

乙：9.78，9.56，9.51，9.36，9.32，9.23；

丙：9.85，9.65，9.20，9.16.

假设用频率估计概率，且甲、乙、丙的比赛成绩相互独立.

(1) 估计甲在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的概率；

(2) 设 X 是甲、乙、丙在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的总人数，估计 X 的数学期望 EX；

(3) 在校运动会铅球比赛中，甲、乙、丙谁获得冠军的概率估计值最大？(结论不要求证明)

(1) $p = f = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

(2) 甲获优秀的概率 $\frac{2}{5}$. 乙优秀的概率 $\frac{1}{2}$. 丙 $\frac{1}{2}$

X 取值 0、1、2、3

$p(X=0) = \frac{3}{5} \times (1-\frac{1}{2}) \times (1-\frac{1}{2}) = \frac{3}{20}$

$p(X=1) = \frac{2}{5} \times (1-\frac{1}{2}) \times (1-\frac{1}{2}) + C_2^1 \frac{1}{2} \cdot (1-\frac{1}{2}) \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

$p(X=2) = \frac{2}{5} \cdot C_2^1 \frac{1}{2} \cdot (1-\frac{1}{2}) + \frac{3}{5} \times (\frac{1}{2})^2 = \frac{7}{20}$. $p(X=3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$

$\therefore E(X) = 0 \times \frac{3}{20} + 1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{7}{20} + 3 \times \frac{1}{10}$

$= \frac{7}{5}$.

(3) 丙.

3. (2022• 新高考Ⅰ) 一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯(卫生习惯分为良好和不够良好两类)的关系,在已患该疾病的病例中随机调查了100例(称为病例组),同时在未患该疾病的人群中随机调查了100人(称为对照组),得到如下数据:

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

(1) 能否有99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异?

(2) 从该地的人群中任选一人,A 表示事件"选到的人卫生习惯不够良好",B 表示事件"选到的人患有该疾病",$\dfrac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}$ 与 $\dfrac{P(B|\bar{A})}{P(\bar{B}|\bar{A})}$ 的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标,记该指标为 R.

①证明:$R=\dfrac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)}\cdot\dfrac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(A|\bar{B})}$;

(1) 零假设 H_0: …… 无差异.

$K^2=\dfrac{(40\times 90-60\times 10)^2\times 200}{100\times 100\times 50\times 150}=24>6.635$

所以有99%的把握……

(2) $R=\dfrac{\dfrac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}}{\dfrac{P(B|\bar{A})}{P(\bar{B}|\bar{A})}}=\dfrac{\dfrac{\frac{P(AB)}{P(A)}}{\frac{P(A\bar{B})}{P(A)}}}{\dfrac{\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}}{\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})}}}=\dfrac{P(AB)\cdot P(\bar{A}\bar{B})}{P(A\bar{B})\cdot P(\bar{A}B)}$

$\dfrac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)}\cdot\dfrac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(A|\bar{B})}=\dfrac{\frac{P(AB)}{P(B)}}{\frac{P(\bar{A}B)}{P(B)}}\cdot\dfrac{\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})}}{\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}}=\dfrac{P(AB)}{P(\bar{A}B)}\cdot\dfrac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(A\bar{B})}$

∴原式成立.

②利用该调查数据，给出 $P(A|B)$，$P(A|\bar{B})$ 的估计值，并利用①的结果给出 R 的估计值.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

$P(A|B)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$

$P(A|\bar{B})=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$

$P(\bar{A}|B)=1-P(A|B)=\frac{3}{5}$

$P(\bar{A}|\bar{B})=1-P(A|\bar{B})=\frac{9}{10}$.

$R=\frac{P(A|B)\cdot P(\bar{A}|\bar{B})}{P(\bar{A}|B)\cdot P(A|\bar{B})}=\frac{\frac{2}{5}\times\frac{9}{10}}{\frac{3}{5}\times\frac{1}{10}}=6$.

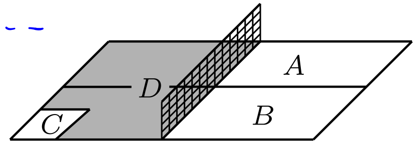
4. (2015 山东) 乒乓球台面被球网分成甲、乙两部分. 如图,甲上有两个不相交的区域 A,B,乙被划分两个不相交的区域 C,D. 某次测试要求队员接到落点在甲上的来球后向乙回球. 规定:回球一次,落点在 C 上记 3 分,在 D 上记 1 分,其它情况记 0 分. 对落点在 A 上的来球,队员小明回球的落点在 C 上的概率为 $\frac{1}{2}$,在 D 上的概率为 $\frac{1}{3}$;对落点在 B 上的来球,小明回球的落点在 C 上的概率为 $\frac{1}{5}$,在 D 上的概率为 $\frac{3}{5}$. 假设共有两次来球且落在 A,B 上各一次,小明的两次回球互不影响. 求:

(1) 小明两次回球的落点中恰有一次的落点在乙上的概率;

(2) 两次回球结束后,小明得分之和 ξ 的分布列与数学期望.

$\therefore E(\xi)=\frac{91}{30}$.

(1) 设事件A表示 落点在A回打到乙落入C or D中. 用B表示 - - - -



$P=P(A)\cdot P(\bar{B})+P(\bar{A})\cdot P(B)$

$=\frac{5}{6}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{5+4}{30}=\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$.

(2) ξ 取值 0, 1, 2, 3, 4, 6.

$P(\xi=0)=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})=\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$

$P(\xi=1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{2+3}{30}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$.

$P(\xi=2)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$

$P(\xi=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{3+1}{30}=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$

$P(\xi=4)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{9+2}{30}=\frac{11}{30}$

$P(\xi=6)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$.

5. 某学校举行知识竞赛，第一轮选拔共设有 A、B、C、D 四个问题，规则如下：

①每位参加者计分器的初始分均为 10 分，答对问题 A、B、C、D 分别加 1 分、2 分、3 分、6 分，答错任一题减 2 分

②每回答一题，计分器显示累计分数，当累计分数小于 8 分时，答题结束，淘汰出局；当累计分数大于或等于 14 分时，答题结束，进入下一轮；当答完四题，累计分数仍不足 14 分时，答题结束，淘汰出局；

③每位参加者按问题 A、B、C、D 顺序作答，直至答题结束.

假设甲同学对问题 A、B、C、D 回答正确的概率依次为 $\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$，且各题回答正确与否相互之间没有影响.

(1) 求甲同学能进入下一轮的概率；

(2) 用 ξ 表示甲本轮答题结束时答题的个数，求 ξ 的分布列和数学期望 $E(\xi)$.

✓ ✓ ✓

× ✓ ✓ ✓

✓ × ✓ ✓

✓ ✓ × ✓

× ✓ × ✓

(1) 设 A_i 表示甲同学答对第 i 个题 $i=1,2,3,4$

$$p=P(A_1A_2A_3)+P(\overline{A_1}A_2A_3A_4)+P(A_1\overline{A_2}A_3A_4)+P(A_1A_2\overline{A_3}A_4)+P(\overline{A_1}\cdot A_2\cdot\overline{A_3}\cdot A_4)$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

(2) ξ 取值 2, 3, 4.

$$P(\xi=2)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$$

$$P(\xi=3)=P(A_1A_2A_3)+P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})$$

✓ ✓ ✓

✓ × ×

$$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{3}{8}$$

$$P(\xi=4)=1-\frac{1}{8}-\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore E(\xi)=\frac{27}{8}.$$

6. (2020 全国 1) 甲、乙、丙三位同学进行羽毛球比赛，约定赛制如下：累计负两场者被淘汰；比赛前抽签决定首先比赛的两人，另一人轮空；每场比赛的胜者与轮空者进行下一场比赛，负者下一场轮空，直至有一人被淘汰；当一人被淘汰后，剩余的两人继续比赛，直至其中一人被淘汰，另一人最终获胜，比赛结束. 经抽签，甲、乙首先比赛，丙轮空. 设每场比赛双方获胜的概率都为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求甲连胜四场的概率；

(2) 求需要进行第五场比赛的概率；

(3) 求丙最终获胜的概率.

(1) $P=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$.

(2) 甲连胜四局 $P_1=\frac{1}{16}$

乙连续四局 $P_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$

丙连续三局 $P_3=1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

需要进行第五场的概率 $P=1-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}-\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$

(3) 由(2)可知丙连胜三场 $P=\frac{1}{8}$

$1\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}$

$+1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$

∴丙最终获胜概率 $P=\frac{5}{16}+\frac{1}{8}=\frac{7}{16}$.

__	丙L	__	丙W	丙W
__	丙W	丙L	__	丙W
甲W	丙W	丙W	丙L	丙W
乙L	甲L	乙L	甲W	甲L.

7. (2010 全国) 投到某杂志的稿件，先由两位初审专家进行评审．若能通过两位初审专家的评审，则予以录用；若两位初审专家都未予通过，则不予录用；若恰能通过一位初审专家的评审，则再由第三位专家进行复审，若能通过复审专家的评审，则予以录用，否则不予录用．设稿件能通过各初审专家评审的概率均为0.5，复审的稿件能通过评审的概率为0.3．各专家独立评审．

(1) 求投到该杂志的1篇稿件被录用的概率；

(2) 记 X 表示投到该杂志的4篇稿件中被录用的篇数，求 X 的分布列及期望．

(1) $P=0.5^2+C_2^1 0.5\times(1-0.5)\times 0.3=0.4$

(2) X 取值 0、1、2、3、4

$P(X=0)=0.6^4$

$P(X=1)=C_4^1 0.4\times 0.6^3$

$P(X=2)=C_4^2 0.4^2\times 0.6^2$

$P(X=3)=C_4^3 0.4^3\times 0.6^1$

$P(X=4)=0.4^4$

∴ X 的分布列

X	0	1	2	3	4
P	0.1296	0.3456	0.3456	0.1536	0.0256

∴ $E(X)=np=4\times 0.4=1.6$

8. (2018 全国卷 Ⅰ) 某工厂的某种产品成箱包装，每箱 200 件，每一箱产品在交付用户之前要对产品作检验，如检验出不合格品，则更换为合格品．检验时，先从这箱产品中任取 20 件作检验，再根据检验结果决定是否对余下的所有产品作检验，设每件产品为不合格品的概率都为 $p(0<p<1)$，且各件产品是否为不合格品相互独立．

$E(ax+b)=aE(x)+b$

(1) 记 20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为 $f(p)$，求 $f(p)$ 的最大值点 p_0．

(2) 现对一箱产品检验了 20 件，结果恰有 2 件不合格品，以 (1) 中确定的 p_0 作为 p 的值．已知每件产品的检验费用为 2 元，若有不合格品进入用户手中，则工厂要对每件不合格品支付 25 元的赔偿费用．

① Y表示剩下180件产品中不合格数 则 $Y \sim B(180, \frac{1}{10})$ $\therefore E(Y)=np=18$, $X=20\times2+25Y$

①若不对该箱余下的产品作检验，这一箱产品的检验费用与赔偿费用的和记为 X，求 $E(X)$；

$\therefore E(X)=40+25\cdot E(Y)$
$=40+25\times18$
$=490$.

②以检验费用与赔偿费用和的期望值为决策依据，是否该对这箱余下的所有产品作检验？

(1) $f(p)=C_{20}^{2}p^{2}(1-p)^{18}$

$f'(p)=C_{20}^{2}\cdot2p\cdot(1-p)^{18}-C_{20}^{2}p^{2}\cdot18(1-p)^{17}$

$=\underbrace{C_{20}^{2}\cdot2p\cdot(1-p)^{17}}_{+}(1-p-9p)$

$\frac{1}{10}$

令 $f'(p)=0$ $\therefore p_0=\frac{1}{10}$ $\therefore f(p)$在$(0,\frac{1}{10})\uparrow$ $(\frac{1}{10},1)\downarrow$ $\therefore$当$p_0=\frac{1}{10}$时 $f(p)$取极大值.

② 若剩下180不检测
$E(X)=490$.
若全部检测 $200\times2=400$
所以对这箱剩余产品全部检测费用较低.

9. 已知 2 件次品和 3 件正品混放在一起，现需要通过检测将其区分，每次随机检测一件产品，检测后不放回，直到检测出 2 件次品或者检测出 3 件正品时检测结束.

(1)求第一次检测出的是次品且第二次检测出的是正品的概率；

(2)已知每检测一件产品需要费用 100 元，设 X 表示直到检测出 2 件次品或者检测出 3 件正品时所需要的检测费用 (单位：元)，求 X 的分布列和均值 (数学期望)

(1) 法一：A_i 表示 i 次抽次品 $P=P(A_1)\cdot P(\overline{A_2}|A_1)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$

法二：$P=\frac{C_2^1\cdot C_3^1\cdot 1}{A_5^2}=\frac{2\times3}{5\times4}=\frac{3}{10}$.

(2) X 取值 200、300、400

$P(X=200)=\frac{C_2^2\cdot A_2^2}{A_5^2}=\frac{2\times1}{5\times4}=\frac{1}{10}$

✓ ✓ ✓
× ✓ ×
✓ × ×

$P(X=300)=\frac{A_3^3+C_3^1\cdot C_2^1A_2^2}{A_5^3}=\frac{6+12}{5\times4\times3}=\frac{3}{10}$

$P(X=400)=\frac{C_2^2C_3^2\cdot C_2^1A_3^3+C_3^3C_2^1C_3^1A_3^3}{A_5^4}=\frac{\cancel{12}^{3}}{5\times4\times\cancel{3}\times\cancel{2}}=\frac{3}{5}$

× ✓ ✓ ×
✓ × ✓ ×
✓ ✓ × ×
× ✓ ✓ ✓
✓ × ✓ ✓
✓ ✓ × ✓

$\therefore E(X)=20+90+240=350$.

赵礼显数学

10. (2017 新课标 Ⅰ) 为了监控某种零件的一条生产线的生产过程，检验员每天从该生产线上随机抽取 16 个零件，并测量其尺寸 (单位：cm)．根据长期生产经验，可以认为这条生产线正常状态下生产的零件的尺寸服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$．

$X\sim B(16,0.0026)$

(1) 假设生产状态正常，记 X 表示一天内抽取的 16 个零件中其尺寸在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之外的零件数，求 $P(X\geqslant1)$ 及 X 的数学期望；

$P(X\geq1)=1-P(X=0)=1-0.9974^{16}=1-0.9592=0.0408$

$E(X)=np=16\times0.0026=0.0416$

(2) 一天内抽检零件中，如果出现了尺寸在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之外的零件，就认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况，需对当天的生产过程进行检查．

①试说明上述监控生产过程方法的合理性；

②下面是检验员在一天内抽取的 16 个零件的尺寸：

9.95	10.12	9.96	9.96	10.01	9.92	9.98	10.04
10.26	9.91	10.13	10.02	9.22	10.04	10.05	9.95

$\hat{\mu}-3\hat{\sigma}=9.97-3\times0.212=9.334$

$\hat{\mu}+3\hat{\sigma}=9.97+3\times0.212=10.606$

经计算得 $\bar{x}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}x_i=9.97$，$s=\sqrt{\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}(x_i-\bar{x})^2}=\sqrt{\frac{1}{16}\left(\sum_{i=1}^{16}x_i^2-16\bar{x}^2\right)}\approx0.212$，其中 x_i 为抽取的第 i 个零件的尺寸，i＝1，2，⋯，16．用样本平均数 $\bar{x}$ 作为 μ 的估计值 $\hat{\mu}$，用样本标准差 s 作为 σ 的估计值 $\hat{\sigma}$，利用估计值判断是否需对当天的生产过程进行检查？剔除 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之外的数据，用剩下的数据估计 μ 和 σ(精确到 0.01)．

$\because 9.22\notin(9.334,10.606)$ ∴当天生产过程有异常，需要进行检查

$\mu=\frac{9.97\times16-9.22}{15}=10.02$

附：若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-3\sigma<Z<\mu+3\sigma)=0.9974$，$0.9974^{16}\approx0.9592$，$\sqrt{0.008}\approx0.09$．

$\sum_{i=1}^{16}x_i^2=0.212^2\times16+16\times9.97^2$

$\sigma=\sqrt{\frac{1}{15}\left[0.212^2\times16+16\times9.97^2-9.22^2\right]-10.02^2}=\sqrt{0.008}\approx0.09$

11. (2013 新课标 I 理科) 一批产品需要进行质量检验，检验方案是：先从这批产品中任取 4 件作检验，这 4 件产品中优质品的件数记为 n. 如果 $n=3$，再从这批产品中任取 4 件作检验，若都为优质品，则这批产品通过检验；如果 $n=4$，再从这批产品中任取 1 件作检验，若为优质品，则这批产品通过检验；其他情况下，这批产品都不能通过检验.

假设这批产品的优质品率为 50%，即取出的产品是优质品的概率都为 0.5，且各件产品是否为优质品相互独立.

(1) 求这批产品通过检验的概率；

$(1)\ P = C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{2} = ?$

(2) 已知每件产品检验费用为 100 元，凡抽取的每件产品都需要检验，对这批产品作质量检验所需的费用记为 X(单位：元)，求 X 的分布列及数学期望。

(2) X 取值为 400、500、800

$P(X=400) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_4^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_4^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{11}{16}$

$n=0$ or 1. or $n=2$

$P(X=500) = \left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot 1 = \frac{1}{16}$

$P(X=800) = C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = 4\times\frac{1}{16} = \frac{1}{4}$

$\therefore X$ 的分布列为 $\boxed{}$

$\therefore E(X) = 400\times\frac{11}{16} + 500\times\frac{1}{16} + 800\times\frac{1}{4}$

$= 506.25.$

12. (2017 新课标III) 某超市计划按月订购一种酸奶，每天进货量相同，进货成本每瓶 4 元，售价每瓶 6 元，未售出的酸奶降价处理，以每瓶 2 元的价格当天全部处理完．根据往年销售经验，每天需求量与当天最高气温 (单位：℃) 有关．如果最高气温不低于 25，需求量为 500 瓶；如果最高气温位于区间 [20，25)，需求量为 300 瓶；如果最高气温低于 20，需求量为 200 瓶．为了确定六月份的订购计划，统计了前三年六月份各天的最高气温数据，得下面的频数分布表：

最高气温	[10, 15)	[15, 20)	[20, 25)	[25, 30)	[30, 35)	[35, 40)
天数	2	16	36	25	7	4

以最高气温位于各区间的频率代替最高气温位于该区间的概率。

(1) 求六月份这种酸奶一天的需求量 X(单位:瓶) 的分布列；

(2) 设六月份一天销售这种酸奶的利润为 Y(单位:元)，当六月份这种酸奶一天的进货量 n(单位：瓶) 为多少时，Y 的数学期望达到最大值？

(1) X 取值 500，300，200

$P(X=500)=\frac{36}{90}=\frac{2}{5}$

$P(X=300)=\frac{36}{90}=\frac{2}{5}$

$P(X=200)=\frac{18}{90}=\frac{1}{5}$

∴ X 的分布列为

(2) ① $0\le n<200$　$E(Y)=2n\in[0,400)$

② $200\le n<300$　$E(Y)=[200\times2+(n-200)\times(-2)]\cdot\frac{1}{5}+2n\cdot\frac{4}{5}$

$=\frac{6}{5}n+160\in[400,520)$

③ $300\le n\le 500$

$E(Y)=[200\times2+(n-200)\cdot(-2)]\cdot\frac{1}{5}+[300\times2+(n-300)\cdot(-2)]\cdot\frac{2}{5}$

$+2n\cdot\frac{2}{5}=-\frac{2}{5}n+640\in[440,520]$

当 $n=300$ 时　$E(Y)_{max}=520$(元)

13. (2021·新高考Ⅱ) 一种微生物群体可以经过自身繁殖不断生存下来，设一个这种微生物为第 0 代，经过一次繁殖后为第 1 代，再经过一次繁殖后为第 2 代…… 该微生物每代繁殖的个数是相互独立的且有相同的分布列，设 X 表示 1 个微生物个体繁殖下一代的个数，$P(X=i)=p_i(i=0,1,2,3)$.

(1) 已知 $p_0=0.4$，$p_1=0.3$，$p_2=0.2$，$p_3=0.1$，求 $E(X)$；

(2) 设 p 表示该种微生物经过多代繁殖后临近灭绝的概率，p 是关于 x 的方程：$p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3=x$ 的一个最小正实根，求证：当 $E(X)\leqslant 1$ 时，$p=1$，当 $E(X)>1$ 时，$p<1$；

(3) 根据你的理解说明 (2) 问结论的实际含义.

(1) $E(X)=0\cdot p_0+1\cdot p_1+2\cdot p_2+3\cdot p_3=0.3+0.4+0.3=1$

(2) $E(X)=0\cdot p_0+1\cdot p_1+2\cdot p_2+3\cdot p_3=\overset{1-p_0-p_2-p_3}{p_1}+2p_2+3p_3=1-p_0+p_2+2p_3$

$p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3=x$

$p_0+(p_1-1)x+p_2x^2+p_3x^3=0$

$p_3x^3-p_3x^2+\overset{1-p_0-p_1}{(p_2+p_3)}x^2+(p_1-1)x+p_0=0$

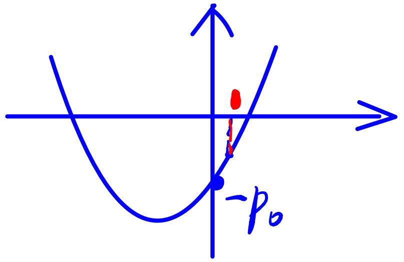
$p_3x^2\cdot(x-1)+(x-1)\cdot[(1-p_0-p_1)x-p_0]=0$

$1-p_0-p_1 \quad -p_0$

$1 \quad -1$

$(x-1)\cdot(p_3x^2+(p_2+p_3)x-p_0)=0$

① 当 $1-p_0+p_2+2p_3\leq 1$ 时 即 $2p_3+p_2\leq p_0$ 时



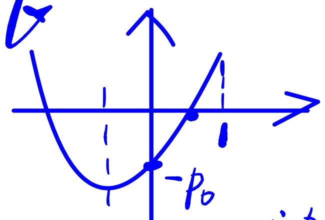
令 $f(x)=p_3x^2+(p_2+p_3)x-p_0$

$\because f(1)=2p_3+p_2-p_0\leq 0$

$\therefore f(x)$ 有大于等于 1 的正根

$\therefore p=1$

② 当 $E(x)>1$ 即 $2p_3+p_2>p_0$ 时



$f(1)=2p_3+p_2-p_0>0$ $f(0)=-p_0<0$ $\therefore f(x)$ 的正根位于 $(0,1)$ $\therefore p<1$

14. (2016 全国 1) 某公司计划购买 2 台机器，该种机器使用三年后即被淘汰．机器有一易损零件，在购进机器时，可以额外购买这种零件作为备件，每个 200 元．在机器使用期间，如果备件不足再购买，则每个 500 元．现需决策在购买机器时应同时购买几个易损零件，为此搜集并整理了 100 台这种机器在三年使用期内更换的易损零件数，得如图柱状图：

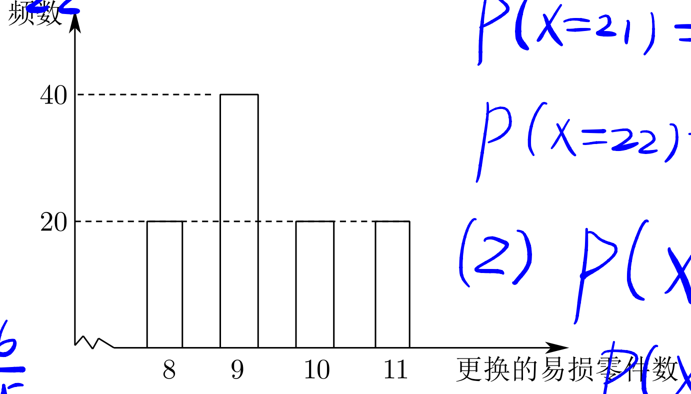
以这 100 台机器更换的易损零件数的频率代替 1 台机器更换的易损零件数发生的概率，记 X 表示 2 台机器三年内共需更换的易损零件数，n 表示购买 2 台机器的同时购买的易损零件数．

(1) X 取值 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22

$P(X=16)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$

$P(X=17)=\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{25}$

$P(X=18)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$



$P(X=21)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{25}$

$P(X=22)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$

(2) $P(X\leq 17)=\frac{5}{25}=0.2<0.5$

$P(X\leq 18)=\frac{11}{25}<0.5$

$P(X\leq 19)=\frac{17}{25}>0.5$ ∴ n 最小值 19.

(1) 求 X 的分布列；

(2) 若要求 $P(X\leqslant n)\geqslant 0.5$，确定 n 的最小值；

(3) 以购买易损零件所需费用的期望值为决策依据，在 $n=19$ 与 $n=20$ 之中选其一，应选用哪个？

$P(X=19)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$

$P(X=20)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{5}{25}$

(3) $n=19$ 时 $19\times200\times\frac{17}{25}+(19\times200+500)\times\frac{5}{25}+(19\times200+1000)\times\frac{2}{25}$

$+(19\times200+1500)\cdot\frac{1}{25}=4040$

$n=20$ 时 $20\times200\times\frac{22}{25}+(20\times200+500)\times\frac{2}{25}+(20\times200+1000)\times\frac{1}{25}=4080$

∴ $n=19$ 时更省钱

15. (2019 全国 1) 为治疗某种疾病，研制了甲、乙两种新药，希望知道哪种新药更有效，为此进行动物试验．试验方案如下：每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验．对于两只白鼠，随机选一只施以甲药，另一只施以乙药．一轮的治疗结果得出后，再安排下一轮试验．当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多 4 只时，就停止试验，并认为治愈只数多的药更有效．为了方便描述问题，约定：对于每轮试验，若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得 1 分，乙药得 -1 分；若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得 1 分，甲药得 -1 分；若都治愈或都未治愈则两种药均得 0 分．甲、乙两种药的治愈率分别记为 α 和 β，一轮试验中甲药的得分记为 X．

X取值 $-1, 0, 1$. $P(X=-1)=\beta\cdot(1-\alpha)$, $P(X=0)=\alpha\beta+(1-\alpha)\cdot(1-\beta)$. $P(X=1)=\alpha\cdot(1-\beta)$

(1) 求 X 的分布列；

∴ X分布列为

X	-1	0	1
P			

(2) 若甲药、乙药在试验开始时都赋予 4 分，$p_i(i=0, 1, \cdots, 8)$ 表示"甲药的累计得分为 i 时，最终认为甲药比乙药更有效"的概率，则 $p_0=0$，$p_8=1$，$p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}(i=1, 2, \cdots, 7)$，其中 $a=P(X=-1)$，$b=P(X=0)$，$c=P(X=1)$．假设 $\alpha=0.5$，$\beta=0.8$．

①证明：$\{p_{i+1}-p_i\}$ $(i=0, 1, 2, \cdots, 7)$ 为等比数列；

②求 p_4，并根据 p_4 的值解释这种试验方案的合理性．

$a=0.8\times0.5=0.4$ $\quad b=0.4+0.1=0.5$. $\quad c=0.1$.

$P_{i+1}=5P_i-4P_{i-1}$ ∴ $P_{i+1}-P_i=4(P_i-P_{i-1})$

∴ $\{P_{i+1}-P_i\}$ 为等比数列 首项 $P_1-P_0=P_1$, $q=4$

$P_{i+1}-P_i=P_1\cdot4^i$

$$\begin{cases} P_1-P_0=P_1\cdot4^0 \\ P_2-P_1=P_1\cdot4^1 \\ P_3-P_2=P_1\cdot4^2 \\ P_4-P_3=P_1\cdot4^3 \\ \vdots \\ P_8-P_7=P_1\cdot4^7 \end{cases}$$

$P_8-P_0=P_1(4^0+4^1+\cdots+4^7)=P_1\cdot\frac{1\cdot(1-4^8)}{1-4}$

∴ $P_1=\frac{3}{4^8-1}$

$P_4-P_0=P_1\cdot(4^0+4^1+4^2+4^3)$

$=\frac{3}{4^8-1}\cdot\frac{1\cdot(4^4-1)}{4-1}=\frac{1}{4^4+1}$

∴ $P_4=\frac{1}{257}$.

赵礼显数学

16. (2023·新高考Ⅰ) 甲、乙两人投篮，每次由其中一人投篮，规则如下：若命中则此人继续投篮，若未命中则换为对方投篮．无论之前投篮情况如何，甲每次投篮的命中率均为0.6，乙每次投篮的命中率均为0.8．由抽签确定第1次投篮的人选，第1次投篮的人是甲、乙的概率各为0.5．

(1) 求第2次投篮的人是乙的概率；

(2) 求第i次投篮的人是甲的概率；

(3) 已知：若随机变量 X_i 服从两点分布，且 $P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=q_i$，i＝1，2，⋯，n，则 $E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}q_i$．记前 n 次(即从第1次到第 n 次投篮)中甲投篮的次数为 Y，求 $E(Y)$．

(1) 设A表示第1次甲投篮，设事件B表示投中.

$P = P(A)\cdot P(\bar{B}|A) + P(\bar{A})\cdot P(B|\bar{A})$

$= 0.5\times0.4 + 0.5\times0.8 = 0.6$

(2) P_i 表示第i次投篮是甲的概率

$P_i = 0.6P_{i-1} + 0.2(1-P_{i-1}) \quad (i\geq2)$

$P_i = 0.4P_{i-1} + 0.2$

令 $x = 0.4x + 0.2$

$0.6x = 0.2$

$x = \frac{1}{3}$

$P_i = \frac{2}{5}P_{i-1} + \frac{1}{5}$

$P_i - \frac{1}{3} = \frac{2}{5}P_{i-1} - \frac{2}{15} = \frac{2}{5}\left(P_{i-1} - \frac{1}{3}\right) \quad (i\geq2)$

∴ $\{P_i - \frac{1}{3}\}$ 为GP 首 $P_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$，$q = \frac{2}{5}$

$P_i - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}$ ∴ $P_i = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}$

(3) $E(Y) = 1\cdot P_1 + 0\cdot(1-P_1) + 1\cdot P_2 + 0\cdot(1-P_2) + \cdots + 1\cdot P_n + 0\cdot(1-P_n)$

$= \sum_{i=1}^{n}P_i = \frac{n}{3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}} = \frac{n}{3} + \frac{5}{18}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$